

目录

1 引言	2
1.1 历史背景	2
1.2 本章概述	2
2 有限元方法基础	2
2.1 强形式与弱形式	2
2.2 伽辽金方法	3
3 变分原理	3
3.1 极小位能原理	3
3.2 拉格朗日乘子法	3
4 高级主题	3
4.1 代码示例	3
4.2 练习	4

1 引言

计算力学是利用数值方法求解力学问题的学科。本章将介绍有限元方法的基本概念。

1.1 历史背景

有限元方法起源于 20 世纪 50 年代的航空工业。Turner 等人于 1956 年首次发表了关于有限元方法的系统性论文。

1.2 本章概述

本书将按以下结构组织：

- 第一章 介绍有限元方法的基本原理
- 第二章 讨论变分原理与弱形式
- 第三章 探讨高阶有限元与谱方法

2 有限元方法基础

2.1 强形式与弱形式

考虑一维泊松方程：

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1)$$

边界条件为 $u(0) = u(1) = 0$ 。

以下定理框使用 Typst 语法；`mytoolkit` 会在转 Typst 前自动包一层 `raw`，避免行首 `#` 被 Pandoc 转义。

Theorem. (解的存在唯一性) 设 $f \in L^2(0, 1)$ ，则上述边值问题存在唯一弱解 $u \in H_0^1(0, 1)$ 。

Proof. 根据 Lax-Milgram 定理，双线性形式 $a(u, v) = \int_0^1 u' v' \, dx$ 在 $H_0^1(0, 1)$ 上是连续且强制的，线性泛函 $L(v) = \int_0^1 f v \, dx$ 是连续的。因此存在唯一解。 $\square$

2.2 伽辽金方法

Example. (一维泊松方程) 取试探空间 $V_h = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$, 其中 ϕ_i 为分段线性帽函数。则近似解可写为:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j(x)$$

代入弱形式并取测试函数 $v = \phi_i$, 得到线性方程组 $Ku = F$ 。

3 变分原理

3.1 极小位能原理

Lemma. (能量泛函的凸性) 定义能量泛函 $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$, 则 J 是严格凸的。

3.2 拉格朗日乘子法

对于有约束的优化问题, 引入拉格朗日乘子:

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = J(u) + \lambda^T(Bu - g)$$

4 高级主题

4.1 代码示例

以下是用 Python 实现的简单有限元求解器:

```
1  import numpy as np
2  from scipy.sparse import csr_matrix
3  from scipy.sparse.linalg import spsolve
4
5  def assemble_stiffness(n):
6      """组装一维刚度矩阵"""
7      h = 1.0 / (n + 1)
8      data = np.array([1/h] * (n-1) + [2/h] * n + [1/h] * (n-1))
9      rows = np.array(list(range(n-1)) + list(range(n)) + list(range(1, n)))
```

python

```

10     cols = np.array(list(range(1, n)) + list(range(n)) + list(range(n-1)))
11     return csr_matrix((data, (rows, cols)), shape=(n, n))
12
13 def solve_poisson_1d(f, n):
14     """求解一维泊松方程"""
15     K = assemble_stiffness(n)
16     h = 1.0 / (n + 1)
17     F = h * f(np.linspace(h, 1-h, n))
18     return spsolve(K, F)

```

4.2 练习

习题 3.1。证明一维线性有限元方法的收敛阶为 $O(h^2)$ ，即：

$$|u - u_h|_1 \leq Ch|u|_2$$

其中 C 为与 h 无关的常数。

习题 3.2。编写程序计算二维正方形区域上的泊松方程，并与解析解比较收敛阶。